



# Effects of curvature on hydrothermal waves instability of radial thermocapillary flows

N. Garnier, C. Normand

## ► To cite this version:

N. Garnier, C. Normand. Effects of curvature on hydrothermal waves instability of radial thermocapillary flows. Comptes Rendus. Physique, 2001, 2, pp.1227-1233. hal-00132425

**HAL Id: hal-00132425**

**<https://hal.science/hal-00132425>**

Submitted on 21 Feb 2007

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Effets de courbure sur l'instabilité en ondes hydrothermales  
d'un écoulement thermocapillaire radial  
Effects of curvature on hydrothermal waves instability of  
radial thermocapillary flows

Nicolas Garnier<sup>†</sup> and Christiane Normand<sup>‡</sup>

<sup>†</sup> Service de Physique de l'Etat Condensé, <sup>‡</sup> Service de Physique Théorique  
CEA/Saclay 91191 Gif-sur-Yvette CEDEX, France

Short title: Effects of curvature on the instability of thermocapillary flows

Corresponding author: C. Normand

Tel:(33) 01 69 08 80 08

Fax: (33) 01 69 08 81 20

e-mail: normand@spht.saclay.cea.fr

## Abstract

The stability of a thermocapillary flow in an extended cylindrical geometry is analysed. This flow occurs in a thin liquid layer with a disk shape when a radial temperature gradient is applied along the horizontal free surface. Besides the aspect ratio, a second parameter related to the local curvature is introduced to describe completely the geometrical effects. We recover classical hydrothermal waves as predicted by Smith and Davis [1] but the properties of these waves are shown to evolve with the curvature parameter, thus leading to a non uniform pattern over the cell. Moreover, it is shown that the problem is not invariant with respect to the exchange of the hot and cold sides.

Keywords: Hydrodynamic instabilities, hydrothermal waves, thermocapillary flow

## Résumé

Nous étudions la stabilité linéaire d'un écoulement thermocapillaire en géométrie cylindrique étendue. Un tel écoulement est produit dans un disque de fluide dont la surface libre horizontale est soumise à un gradient de température purement radial. Outre le rapport d'aspect, un second paramètre lié à la courbure locale est introduit pour caractériser la géométrie du problème. L'instabilité en ondes hydrothermales prédite par [1] est retrouvée mais les propriétés des ondes sont altérées par la courbure locale ce qui explique l'existence de structures non uniformes. La dissymétrie du problème vis-à-vis d'une inversion du gradient de température est aussi mise en évidence.

Mots clés: Instabilités hydrodynamiques, ondes hydrothermales, écoulement thermocapillaire

## 1 Introduction

Lorsque la surface libre d'une couche de fluide de faible épaisseur  $B \ll q$

A A est soumise à un gradient thermique horizontal il apparaît un écoulement dû à l'effet Marangoni qui résulte de la variation de la tension superficielle avec la température. Cet écoulement qui est stationnaire pour de faibles valeurs du gradient thermique, se déstabilise au-delà d'un seuil à partir duquel il apparaît des ondes propagatives hydrothermales selon la terminologie de Smith et Davis [1].

Les analyses de stabilité [2] de ce type d'écoulement étaient jusqu'à présent surtout adaptées aux réalisations expérimentales en cellules rectangulaires [3]. Peu d'études théoriques traitent de la géométrie cylindrique [4] alors que de nombreuses expériences sont réalisées dans cette configuration [5], [6], [7]. Pour y remédier, nous analysons l'effet de la courbure sur les propriétés critiques des ondes hydrothermales.

Un schéma du système considéré est représenté en figure 1. Une couche de fluide d'épaisseur  $h$  est confinée latéralement par deux cylindres de rayons  $R_1$  et  $R_2 = R_1 + L$  maintenus aux températures  $T_1$  et  $T_2$  respectivement. Le fluide est incompressible, de viscosité  $\nu$ , diffusivité thermique  $\kappa$ , densité  $\rho$ , coefficient de dilatation thermique  $\alpha$ . La tension superficielle  $\sigma$  de l'interface varie avec la température  $T$  du fluide et  $\partial\sigma/\partial T = -\gamma$ , avec  $\gamma$  constant et positif.

## 2 Etat de base

Deux paramètres sans dimension sont nécessaires pour caractériser complètement la géométrie. D'une part, le rapport d'aspect  $\varepsilon = h/L$ , et d'autre part le maximum de la courbure locale

$\phi = L/R_1$ . Effectuant le changement de variable radiale  $r = R_1 + LX$ , la courbure locale  $L/r$ , est représentée par la fonction  $\Phi(X) = \phi/(1 + \phi X)$ .

La vitesse et la température du fluide sont régies par les équations de Navier-Stokes dans l'approximation de Boussinesq et par l'équation de la chaleur. Un choix d'échelles approprié permet d'écrire ces équations pour des grandeurs sans dimension faisant ainsi apparaître le nombre de Reynolds  $Re = \gamma(T_2 - T_1)h^2/\nu^2\rho_0L$  et le nombre de Grashof  $Gr = \alpha g(T_2 - T_1)h^4/L\nu^2$  dont on notera le rapport  $W = Re/Gr$ . Après multiplication par le nombre de Prandtl  $Pr = \nu/\kappa$  du fluide on obtient respectivement le nombre de Marangoni  $Ma = RePr$  et le nombre de Rayleigh  $Ra = GrPr$ . Les conditions aux limites qui s'expriment par les relations (1) et (2) représentent une paroi inférieure rigide et conductrice et une surface supérieure libre et plane où les échanges thermiques sont décrits par l'intermédiaire d'un nombre de Biot  $Bi$ .

Loin des parois cylindriques qui confinent le fluide latéralement, la vitesse et la température dans l'état de base  $(u_0, 0, w_0, T_0)$  sont déterminées par un développement en puissance de  $\varepsilon$  (3). La variation lente de l'écoulement de base dans la direction radiale est reportée dans la définition du nombre de Grashof local  $Gr_X = Gr\Phi(X)$ , permettant ainsi d'effectuer une analyse de stabilité locale où  $Gr_X$  représente le paramètre de contrôle et où intervient le paramètre géométrique  $\Gamma(X) = \varepsilon\Phi(X)$  mesurant la courbure locale.

### 3 Analyse de stabilité linéaire

On superpose à l'état de base des perturbations tri-dimensionnelles  $\vec{v}$  pour la vitesse et  $T$  pour la température représentées par des modes (4) de nombre d'onde azimutal  $m$  et de fréquence  $\omega$ . Nous considérons des perturbations qui évoluent dans le plan horizontal sur une échelle de longueur plus courte que celle de l'écoulement de base, ce qui conduit à introduire la variable  $x = \varepsilon^{-1}X$  et à remplacer le nombre d'onde azimutal  $m$  par  $\beta = \Gamma(X)m$ . Pour une valeur fixée de  $\Gamma$ , les perturbations admettent comme solutions des fonctions périodiques en  $x$ , de nombre d'onde radial  $\alpha$ . Après linéarisation, les équations d'évolution pour les perturbations se réduisent au système d'équations différentielles (5)-(8), avec la condition d'incompressibilité (9) et les conditions aux limites associées (10) and (11).

En l'absence de courbure,  $\Gamma = 0$ , la permutation des bords chaud et froid n'a pas de conséquence majeure puisque le système (5)-(8) est invariant dans la transformation  $(Gr, \alpha, u \rightarrow -Gr, -\alpha, -u)$ . Il n'en va plus de même lorsque  $\Gamma \neq 0$ , auquel cas il faut inverser conjointement  $\Gamma$  pour conserver l'invariance du système. Après résolution numérique du système (5)-(8) pour les valeurs des paramètres ( $Pr = 10, Bi = 1, \phi = 16, W = 6$ ), on présente en figure 2 les valeurs critiques du nombre de Grashof, de la fréquence et des nombres d'onde en fonction de la courbure.

## 4 Discussion

La variation de la valeur critique du nombre de Grashof en fonction de la position radiale est représentée sur la figure 2d. On remarque une décroissance de  $Gr_c$  lorsque  $r \rightarrow 0$ , révélant ainsi que l'instabilité apparaît en premier lieu près du cylindre intérieur où la courbure est plus importante. Les variations de la fréquence et des composantes radiale et azimutale du vecteur d'onde sont représentées sur les Figs. 2a et 2b. Lorsque  $T_1 < T_2$ , le nombre d'onde azimutal s'annule pour une valeur de la courbure  $\Gamma^* = 0.24$  alors qu'il reste fini lorsque  $T_1 > T_2$ . Ces résultats sont en accord avec les observations expérimentales effectuées par ombroscopie [6, 7].

## 5 Conclusion

Nous avons considéré l'écoulement qui apparaît dans une mince couche de fluide confinée entre deux cylindres maintenus à des températures différentes. Loin des parois latérales, l'état de base est modélisé par un écoulement lentement variable suivant la direction radiale. Une analyse locale de stabilité est effectuée conduisant aux valeurs critiques du nombre de Grashof, de la fréquence et du vecteur d'onde en fonction de la courbure locale. Ces résultats montrent que l'instabilité apparaît en premier près du cylindre intérieur avec un vecteur d'onde purement radial si ce cylindre est le bord froid et dans le cas contraire ce sont des ondes spirales qui apparaissent. Ces prédictions théoriques sont en très bon accord avec les résultats expérimentaux exposés en [6], [7].

## 1 Sketch of the problem

When a horizontal temperature gradient is imposed over a thin fluid layer with a free surface, a basic flow is present due to the Marangoni effect, *i.e.*, surface tension dependence on the temperature. When the temperature difference is small, the characteristic velocity of the flow is proportional to the thermal constraint and the flow is stationary. When the temperature difference is increased above a threshold value, the basic flow is unstable to propagating waves called hydrothermal waves and first predicted by Smith and Davis [1] for a zero gravity environment.

The stability analysis of the basic flow has been addressed by many authors in cartesian coordinates [2], corresponding to experiments in rectangular cavities [3], but a very few theoretical studies were devoted to the cylindrical geometry [4] though experiments are often conducted in this configuration [5]. The present paper aims to fill the gap and investigates the effect of curvature on the critical properties of hydrothermal waves.

The section of a typical cell in a vertical diametrical plane is depicted on Fig. 1. We note  $h$  the depth of the fluid layer, and  $R_1, R_2 = R_1 + L$  the radii of the internal and external cylindrical boundaries that confine the fluid in the horizontal direction. The horizontal temperature gradient

is supposed to be applied as a temperature difference between the inner and the outer boundaries, considered as isothermal with temperature  $T_1$  and  $T_2$  respectively. The bottom of the cell is considered as perfectly conducting [6] and a mixed thermal boundary condition is used for the top free surface [2]. The fluid is assumed to be incompressible with kinematic viscosity  $\nu$ , thermal diffusivity  $\kappa$ , density  $\rho$ , thermal expansion coefficient  $\alpha$ . The surface tension  $\sigma$  of the interface varies with the temperature  $T$  of the liquid and its derivative  $\partial\sigma/\partial T = -\gamma$ , is considered as constant and negative ( $\gamma > 0$ ).

## 2 Formulation of the basic flow

To fully characterise the geometrical configuration, two non-dimensional parameters are required. First, the aspect ratio  $\varepsilon = h/L$  which is supposed to be small in the present extended geometry ( $\varepsilon < 0.03$ ). Second, the local curvature proportional to the inverse of the radius will be represented in nondimensional form by  $L/r$ . Its maximum value:  $\phi = L/R_1$ , is taken as the additional parameter characteristic of the cylindrical geometry as a whole. When the change of variable:  $r = R_1 + LX$ , is made the local curvature is expressed as

$$\Phi(X) = \frac{\phi}{1 + \phi X} = \frac{L}{r}$$

The basic flow is governed by the Navier-Stokes equations in the Boussinesq approximation together with the heat equation. Owing to rotational invariance of the system about the vertical axis  $e_z$  of the cell, the basic flow has no azimuthal velocity component. The governing equations are written in non-dimensional form by taking the following scales :  $h$  for the vertical coordinate  $z$ ,  $\nu/h$  for vertical velocity  $w$  and radial velocity  $u$ ,  $h^2/\nu$  for the time  $t$ ,  $\nu^2\rho_0 L/h^3$  for the pressure  $P$  and  $T_2 - T_1$  for the temperature difference  $T - T_1$ .

The boundary conditions represent a conducting rigid bottom at  $z = 0$  and a mixed thermal condition on the top free surface at  $z = 1$  :

$$u = w = 0, \quad \text{and} \quad T = T_c(X) \quad \text{on} \quad z = 0, \quad (1)$$

$$w = 0, \quad \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon \frac{\partial w}{\partial X} \right) + \text{Re} \frac{\partial T}{\partial X} = 0, \quad \text{and} \quad \frac{\partial T}{\partial z} + \text{Bi}(T - T_c(X)) = 0, \quad \text{on} \quad z = 1, \quad (2)$$

where  $T_c(X) = \ln(1 + \phi X)/\ln(1 + \phi)$  is the conductive temperature profile in the cylindrical geometry and Bi is the Biot number. The Reynolds number  $\text{Re} = \gamma(T_2 - T_1)h^2/\nu^2\rho_0 L$  is related to the Marangoni number by  $\text{Ma} = \text{RePr}$  where  $\text{Pr} = \nu/\kappa$  is the Prandtl number of the fluid.

Far from the lateral boundaries, the basic state  $(u_0, 0, w_0, T_0)$  is determined as an expansion into the small parameter  $\varepsilon$ , as performed by [4]. Up to first order in  $\varepsilon$ , we obtain:

$$\begin{cases} u_0(X, z) &= \text{Gr}\Phi(X)\bar{u}_0(W, z) + \varepsilon\text{Gr}^2\Phi(X)^3\bar{u}_1(W, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ w_0(X, z) &= \mathcal{O}(\varepsilon^2) \\ T_0(X, z) &= T_c(X) + \varepsilon\text{Ra}\Phi(X)^2\bar{T}_0(W, z) + \mathcal{O}(\varepsilon^2) \end{cases} \quad (3)$$

with the Grashof number:

$$\text{Gr} = \frac{\alpha g(T_2 - T_1)h^4}{L\nu^2}$$

and the Rayleigh number  $\text{Ra} = \text{GrPr}$ . The parameter  $W = \text{Re}/\text{Gr}$ , which behaves like  $h^{-2}$  is the inverse of the Bond number, it measures the relative importance of thermocapillary and thermogravity effects. The functions  $\bar{u}_0(W, z)$  and  $\bar{T}_0(W, z)$  are polynomials in  $z$  similar to those that describe the velocity and temperature profiles in rectangular geometry [2] and  $\bar{u}_1(W, z)$  is given in [7]. The main difference with the rectangular geometry is the non uniformity of the flow along the radial direction which appears through the slowly varying function  $\Phi(X)$ . In the forthcoming stability analysis this will prevent decomposition of the disturbances in Fourier modes in the radial direction. To bypass this difficulty we shall perform a local stability analysis and introduce the local Grashof number  $\text{Gr}_X = \text{Gr}\Phi(X)$  as the governing parameter and similarly  $\text{Ra}_X = \text{Ra}\Phi(X)$ . In the following we shall assume that  $\text{Gr}_X = \mathcal{O}(1)$ . Thus, the second term in the expansion of  $u_0$  and  $T_0$  is of the order  $\varepsilon\Phi(X) = \Gamma(X)$  which is a small quantity only near the outer cylinder where  $\Gamma(1) \approx \varepsilon$ . Near the inner cylinder,  $\Gamma(X)$  takes values as large as  $\Gamma(0) = 0.475$  [7] and cannot be neglected. It will be shown in the next section that the perturbations equations depend on  $X$  exclusively through  $\text{Gr}_X$  and  $\Gamma(X)$ .

### 3 Linear stability analysis

The basic state (3) is perturbed by the superposition of three-dimensional disturbances  $\vec{v}$ , for the velocity and  $T$ , for the temperature such as

$$\{\vec{v}(r, \theta, z, t), T(r, \theta, z, t)\} = \exp i(m\theta + \omega t) \left\{ \hat{u}(r, z), \hat{v}(r, z), \hat{w}(r, z), \hat{T}(r, z) \right\} \quad (4)$$

where  $m$  is the azimuthal wavenumber and  $\omega$  the frequency. The disturbances are assumed to evolve in the horizontal plane on a smaller scale than the basic flow. Thus, the fast variable  $x = \varepsilon^{-1}X$  is introduced and the azimuthal wavenumber  $m$  is replaced by the local wavenumber  $\beta = \Gamma(X)m$ . If the stability analysis is performed while  $\Gamma$  is kept constant, the disturbances can be sought as periodic functions of  $x$  such as for example  $\hat{u}(r, z) = u(z) \exp i\alpha x$ . The linearized evolution equations for the perturbations reduce to a set of coupled differential equations

$$\begin{aligned} \text{Gr}_X [((i\alpha - \Gamma)\bar{u}_0 + \Gamma\text{Gr}_X(i\alpha - 3\Gamma)\bar{u}_1) u \\ + (\bar{u}'_0 + \Gamma\text{Gr}_X\bar{u}'_1)w] = -i\alpha p + (L - i\omega - \Gamma^2)u - 2i\beta\Gamma v \end{aligned} \quad (5)$$

$$\text{Gr}_X (i\alpha + \Gamma)(\bar{u}_0 + \Gamma \text{Gr}_X \bar{u}_1)v = -i\beta p + (L - i\omega - \Gamma^2)v + 2i\beta\Gamma u, \quad (6)$$

$$i\alpha \text{Gr}_X (\bar{u}_0 + \Gamma \text{Gr}_X \bar{u}_1)w = -\frac{\partial p}{\partial z} + (L - i\omega)w + T, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \text{Ra}_X [i\alpha(\bar{u}_0 + \Gamma \text{Gr}_X \bar{u}_1)T + (1 - 2\Gamma \text{Ra}_X \bar{T}_0)u \\ + \text{Ra}_X \bar{T}_0' w] = (L - iPr\omega)T \end{aligned} \quad (8)$$

with  $L = \partial^2/\partial z^2 - (\alpha^2 + \beta^2) + i\alpha\Gamma$ . The incompressibility condition reads

$$(i\alpha + \Gamma)u + i\beta v + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

The boundary conditions are

$$u = v = w = T = 0, \quad \text{at} \quad z = 0, \quad (10)$$

$$w = 0, \quad \partial_z T + BiT = 0, \quad \partial_z u + i\alpha WT = 0, \quad \partial_z v + i\beta WT = 0. \quad \text{at} \quad z = 1. \quad (11)$$

When  $\Gamma = 0$ , the permutation of the cold and hot sides has no consequence on the instability pattern. Indeed, the transformation  $(Gr, \alpha, u \rightarrow -Gr, -\alpha, -u)$  leaves the above system invariant. This is no longer true when  $\Gamma \neq 0$ , in which case the sign of  $\Gamma$  needs also to be changed jointly for the system to be invariant. For fixed values of the curvature parameter  $\Gamma$ , the differential system is solved by the same method as in [2] and critical values of the Grashof number, frequency and wavevector are found as functions of the curvature parameter  $\Gamma$ .

The results presented on Fig. 2 are obtained for values of the physical and geometrical parameters ( $Pr = 10, Bi = 1, \phi = 16, W = 6$ ) corresponding to experiments described in [6]. On this figure, we have used the signed curvature  $\text{sgn}(T_2 - T_1)\Gamma(X)$  and we can then observe the smooth behaviour of all the quantities when crossing the zero value corresponding to the rectangular case. Results obtained for  $W = 2.4$  [7], which are not reported here, confirm the behavior of the critical quantities shown in Fig. 2.

## 4 Discussion

From Fig. 2c showing the critical value of the local Grashof number as function of the local curvature we deduced Fig. 2d showing the critical Grashof number  $Gr_c$  versus the radial position, which is more convenient for comparison with experimental results. Particularly interesting is the decrease of the critical Grashof number when  $r \rightarrow 0$ . This means that hydrothermal waves will first appear near the center of the cylindrical cell, i.e., in region of higher curvature. An increase in the curvature also leads to a variation of the frequency (Fig. 2b) and over all to a significant variation of the wavevector orientation (Fig. 2a).

When  $T_2 > T_1$ , the azimuthal wavenumber  $\beta$  vanishes for a value of the curvature  $\Gamma^* = 0.24$ , which means that in cells with enough curvature, hydrothermal waves will be not only localized



near the center, but they will propagate in the radial direction at onset. This fact was observed experimentally in [6] where shadowgraphic pictures of the instability pattern clearly show that at onset the spatial structure is made of concentric circles called targets, which are localized near the cold center of the cell. Slightly above onset the pattern spreads toward the outer side of the cell and deforms progressively to give rise to spirals that fill more and more space as the supercritical region extends (Fig. 2d), in agreement with experimental observations (Fig. 6,7 in [6]).

When the center of the cell is the hot side ( $T_1 > T_2$ ), the situation is quite different and there is experimental evidence that the instability pattern has always a non vanishing azimuthal wavenumber in agreement with our theoretical results. For a small height of fluid the pattern is made of spirals localized near the center of the cell [7]. For a higher height of fluid, an hexagonal structure is shown at onset [7].

## 5 Conclusion

The flow which appears in a thin fluid layer confined between two differentially heated cylinders was considered. Far from the sidewalls, the basic state is modeled by a slowly varying flow along the radial direction. A local stability analysis is performed leading to the critical values of the Grashof number, wavenumbers and frequency as functions of the local curvature. As a result, the instability is predicted to appear first near the inner cylinder and the values of the corresponding wavenumbers are quite different whether the inner cylinder is the hot or the cold side. This is in agreement with experiments where spiraling waves have been observed near the hot inner side [7] while pulsating targets appears when the inner cylinder is the cold side [6].

## References

- [1] M. K. Smith and S. H. Davis, Instabilities of dynamic thermocapillary liquid layers. Part 1. Convective instabilities, *J. Fluid Mech.*, **132** (1983) 119-144.
- [2] J.-F. Mercier and C. Normand, Buoyant-thermocapillary instabilities of differentially heated liquid layers, *Phys. Fluids*, **8** (1996) 1433-1445.
- [3] R. J. Riley and G. P. Neitzel, Instability of thermocapillary-buoyancy convection in shallow layers. Part 1. Characterization of steady and oscillatory instabilities, *J. Fluid Mech.*, **359**, (1998) 143-164.
- [4] D. R. Vrane and M. K. Smith, The influence of domain curvature on the stability of viscously-dominated thermocapillary flows, in *Advances in multi-fluid flows*, Y. Renardy, A. Coward,

- D. Papageorgiou and S.-M. Sun eds., AMS-IMS-SIAM Joint Summer Research Conference, 219–238, 1996.
- [5] D. Schwabe, U. Möller, J. Schneider and A. Scharmann, Instabilities of shallow dynamic thermocapillary liquid layers, *Phys. Fluids A*, **4**, (1992) 2368-2381.
- [6] N. Garnier and A. Chiffaudel, Two dimensional hydrothermal waves in an extended cylindrical vessel, *Eur. Phys. J. B*, **19** (2001) 87-95.
- [7] N. Garnier, Ondes non-linéaire à une et deux dimensions dans une mince couche de fluide, *Thèse de Doctorat*, Université Paris 7, 2000.

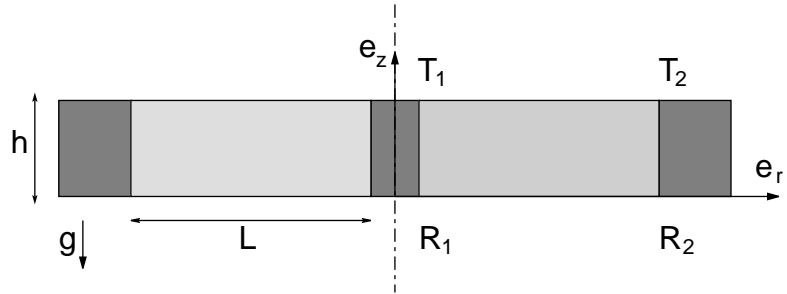


Figure 1: Section of the cylindrical geometry and associated notations.

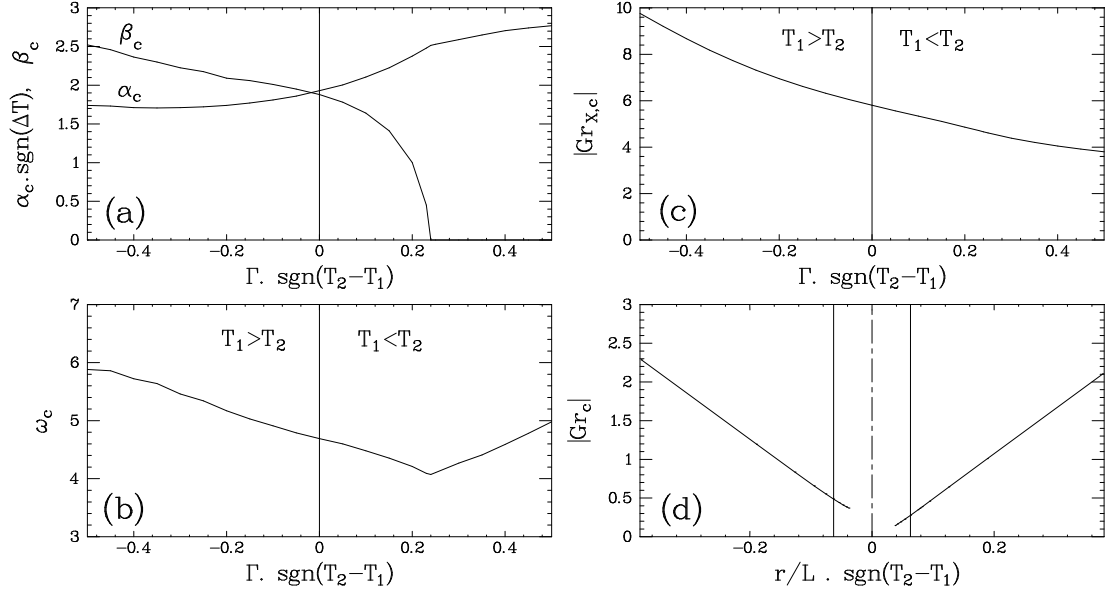


Figure 2: Critical values of (a) the wavenumbers  $(\alpha, \beta)$ , (b) the frequency  $\omega$  and (c) the local Grashof number  $Gr_X$  as functions of the signed curvature. (d): Grashof number  $Gr$  versus signed radial position.